Цикл практических занятий по математике «Решим задачи части «С» ЕГЭ

<u>Занятие № 1:</u> *Решение тригонометрических уравнений. Отбор корней* (задания С1)

I. Решение простейших тригонометрических уравнений с дополнительными условиями.

Задание: **а)** Решить уравнение;
б) Указать корни уравнения, удовлетворяющие условию.

1. **а)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $x \in \left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: **а)** $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; **б)** $\dfrac{9\pi}{4}$.

2. **а)** $\sin x = -\dfrac{1}{2}$; **б)** $\operatorname{tg} x > 0$.

Ответ: **а)** $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; **б)** $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

3. **а)** $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $x \in \left(-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Ответ: **а)** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; **б)** $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{13\pi}{6}$.

4. **а)** $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $x \in [-\pi; \pi]$.

Ответ: **а)** $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; **б)** $\pm\dfrac{\pi}{12}$; $\pm\dfrac{11\pi}{12}$.

5. **а)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$; **б)** $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: **а)** $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; **б)** $\dfrac{2\pi}{3}$.

6. **а)** $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\pi x - \dfrac{\pi}{5}\right) = 1$ **б)** $-2 < x < 1$

Ответ: **а)** $x = \dfrac{11}{30} + n, n \in Z$; **б)** $-\dfrac{49}{30}$; $-\dfrac{19}{30}$; $\dfrac{11}{30}$.

Упражнения для повторения:

1. **а)** $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ **б)** $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: **а)** $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; **б)** $-\dfrac{4\pi}{3}$; $-\dfrac{2\pi}{3}$.

2. **а)** $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$; **б)** $x \in [-2\pi; \pi)$.

Ответ: **а)** $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2}{3}\pi n, n \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2}{3}\pi k, k \in Z$;

б) $-\dfrac{17\pi}{9}; -\dfrac{11\pi}{9}; -\dfrac{5\pi}{9}; \dfrac{\pi}{9}; \dfrac{7\pi}{9}; -\dfrac{5\pi}{3}; -\pi; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}$.

II. Решение тригонометрических уравнений, основные типы.

1. ***Квадратные относительно тригонометрической функции.***

1. $2\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right) - 9\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + 3 = 0$ **Ответ:** $x = \pm\pi + 6\pi n, \quad n \in Z$

$\boxed{2.}$ $\left(\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x-6\right)\cdot\sqrt{-\cos x}=0$

Ответ: $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$ **;** $x=\pi-\operatorname{arctg}6+2\pi k,\ k\in Z$ **.**

2. ***Однородные.***

$\boxed{1.}$ $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in Z$ **.**

$\boxed{2.}$ $3\sin^2 x+4\cos^2 x=13\sin x\cdot\cos x$

Ответ: $x=\operatorname{arctg}4+\pi k,\ k\in Z$ **;** $x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$ **.**

$\boxed{3.}$ $10\cos^2 x-5\sin 2x=4$

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$ **;** $x=-\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$ **.**

3. ***Разложение на множители.***

$\boxed{1.}$ $6\sin x\cdot\cos x+\sin 2x\cdot\sin\dfrac{2}{x}=0$

Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{2},\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

$\boxed{2.}$ **а)** $2\sin 2x-4\cos x-\sin x+1=0$ **б)** $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$**.**

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ **;** $x=\pm\arccos\dfrac{1}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ **б)** $\dfrac{\pi}{2}$..

4. ***Использование периодичности функций.***

$$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\beta+2\pi n,\ n\in Z\\ \alpha=\pi-\beta+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.\qquad \cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\beta+2\pi n,\ n\in Z\\ \alpha=-\beta+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\beta+\pi n,\ n\in Z\\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$\boxed{1.}$ **а)** $\cos 6x=\cos 3x$**;** **б)** $x\in[0;\pi]$

Ответ: а) $x=\dfrac{2}{3}\pi n,\ n\in Z$ **;** $x=\dfrac{2}{9}\pi k,\ k\in Z$ **;** **б)** $0;\ \dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{2\pi}{9};\ \dfrac{4\pi}{9};\ \dfrac{8\pi}{9}.$

$\boxed{2.}$ **а)** $\sin x=\cos 7x$**;** **б)** $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$**.**

Ответ: **а)** $x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{4},\ n\in Z;\quad x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z$

б) $-\dfrac{3\pi}{16},\ \dfrac{\pi}{16},\ \dfrac{5\pi}{16};\ -\dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{\pi}{4}.$

$\boxed{3.}$ $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}3x$ **Ответ:** $x=-\pi k,\ k\in Z$ **.**

$\boxed{4.}$ **а)** $\cos 2x+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=0$ **б)** $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x=\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in Z$ **;** **б)** $0;\ \dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{4\pi}{3};\ 2\pi$.

Упражнения для повторения:

$\boxed{1.}$ **а)** $\sin 2x = \cos x$; **б)** $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$; **б)** $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{2.}$ **а)** $5\sin^2 2x + 8\cos^3 x = 8\cos x$; **б)** $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \pi k,\ k \in Z$; $x = \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi m,\ m \in Z$;

б) $\frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

$\boxed{3.}$ **а)** $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$; **б)** $\cos x < 0$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; **б)** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\boxed{4.}$ **а)** $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$ **б)** $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; **б)** $-\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg} 3$; $\operatorname{arctg} 3 - \pi$.

$\boxed{5.}$ **а)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$; **б)** $x \in \left[\frac{5\pi}{4}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$;

б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}$.

III. Задания В5

$\boxed{1.}$ Найти наименьший положительный корень уравнения; ответ дать в градусах:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: 270.

$\boxed{2.}$ Найти наибольший отрицательный корень уравнения; ответ дать в градусах:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: –60.

$\boxed{3.}$ Найти наибольший отрицательный корень уравнения; ответ записать в градусах:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Ответ: –90.

$\boxed{4.}$ Найти наибольший корень уравнения $\cos 2x + 3\sin x = 2$, принадлежащий отрезку $[-3\pi; -\pi]$; ответ дать в градусах.

Ответ: –210.

$\boxed{5.}$ Найти число корней уравнения $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ при $x \in (0°; 45°)$.

Ответ: 1.

IV. Практикум по решению заданий С1.

$\boxed{1.}$ **а)** $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ **б)** $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x = arctg\frac{3}{7} + \pi k,\ k \in Z$; **б)** $\frac{7\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + 2\pi$.

2. **а)** $\cos 2x+2\cos^2 x-\sin 2x=0$ **б)** $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ **;** $x=-arctg3+\pi k,\ k\in Z$ **; б)** $\frac{9\pi}{4};-\operatorname{arctg}3+2\pi$ **.**

3. **а)** $\sin x+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0$ **б)** $x\in\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ **; б)** $\frac{7\pi}{4}$**.**

4. **а)** $\cos x=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2-1$ **б)** $x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ **; б)** $\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$**.**

5. **а)** $\sin 2x=2\sin x-\cos x+1$ **б)** $x\in\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x=2\pi k,\ k\in Z;\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n;n\in Z;\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m;m\in Z$ **; б)** $-2\pi;-\frac{5\pi}{6}$**.**

6. **а)** $6\cos^2 x-7\cos x-5=0$ **б)** $x\in[-\pi;2\pi]$

Ответ: а) $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k;k\in Z;\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$ **; б)** $\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}$**.**

7. **а)** $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **б)** $x\in\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$

Ответ: а) $x=\pi k;k\in Z;\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;n\in Z;\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m;m\in Z$ **; б)** $-2\pi;-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}$**.**

8. **а)** $6\sin^2 x+\cos x-5=0$ **б)** $x\in[2\pi;3\pi]$

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z;\ x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi m;m\in Z$ **; б)** $\frac{7\pi}{3};3\pi-\arccos\frac{1}{3}$**.**

9. **а)** $\sqrt{3}\sin x-tgx+tgx\sin x=\sqrt{3}$ **б)** $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in Z$ **; б)** $-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}$**.**

10. **а)** $4\cos x\sin x-3\sin^2 x=1$ **б)** $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$

Ответ: а) $x=arctg\frac{1}{2}+\pi n;n\in Z$ **; б)** $-\pi+arctg\frac{1}{2};arctg\frac{1}{2};\pi+arctg\frac{1}{2};$**.**

11. $(\cos 3x-1)\sqrt{6+5x-x^2}=0$

Ответ: $-1;6;0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$**.**

12. $\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}\cdot(\cos 4x+\sin 3x-\cos 2x)=0$

Ответ: $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6};3$**.**