

**К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ  
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ**

**ЕДИНЫЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**



**ЭКЗАМЕН**

**Под редакцией И. В. Ященко**

**СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ**

**МАТЕМАТИКА**

**ЕГЭ**

**2016**

**ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ  
ЗАДАНИЯ**

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

---

Под редакцией И. В. Яценко

# МАТЕМАТИКА

*ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ*

*10 вариантов заданий*

*Ответы и решения*

*Критерии оценок*

*Бланки ответов*

*Издательство  
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА  
2016

УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21  
Е33

ЭГЭ 2016

**Е33** ЭГЭ 2016. Математика. Типовые тестовые задания / И. В. Яценко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; под ред. **И. В. Яценко**. — М. : Издательство «Экзамен», 2016. — 55, [1] с. (Серия «ЭГЭ. ОФЦ. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-09762-4

Типовые тестовые задания по математике содержат 10 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена в 2016 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2016 г. по математике, степени трудности заданий.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21

---

Формат 60×90/8.

Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,63.

Усл. печ. л. 7. Тираж 32 000 экз. Заказ 2044/15.

---

ISBN 978-5-377-09762-4

© Яценко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р.,  
Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н.,  
Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р.,  
Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Хачатурян А. В.,  
Шестаков С. А., Шноль Д. Э., 2016

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2016

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Инструкция по выполнению работы</b> .....	4
<b>Вариант 1</b>	
Часть 1 .....	5
Часть 2 .....	7
<b>Вариант 2</b>	
Часть 1 .....	9
Часть 2 .....	11
<b>Вариант 3</b>	
Часть 1 .....	13
Часть 2 .....	15
<b>Вариант 4</b>	
Часть 1 .....	17
Часть 2 .....	18
<b>Вариант 5</b>	
Часть 1 .....	21
Часть 2 .....	23
<b>Вариант 6</b>	
Часть 1 .....	25
Часть 2 .....	27
<b>Вариант 7</b>	
Часть 1 .....	29
Часть 2 .....	31
<b>Вариант 8</b>	
Часть 1 .....	33
Часть 2 .....	35
<b>Вариант 9</b>	
Часть 1 .....	37
Часть 2 .....	39
<b>Вариант 10</b>	
Часть 1 .....	41
Часть 2 .....	42
<b>Ответы</b>	
Вариант 1 .....	45
Вариант 2 .....	45
Вариант 3 .....	45
Вариант 4 .....	46
Вариант 5 .....	46
Вариант 6 .....	46
Вариант 7 .....	47
Вариант 8 .....	47
Вариант 9 .....	47
Вариант 10 .....	48
<b>Решение заданий</b>	
Вариант 8. Часть 2 .....	51

# ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 задание. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!*

---

## Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

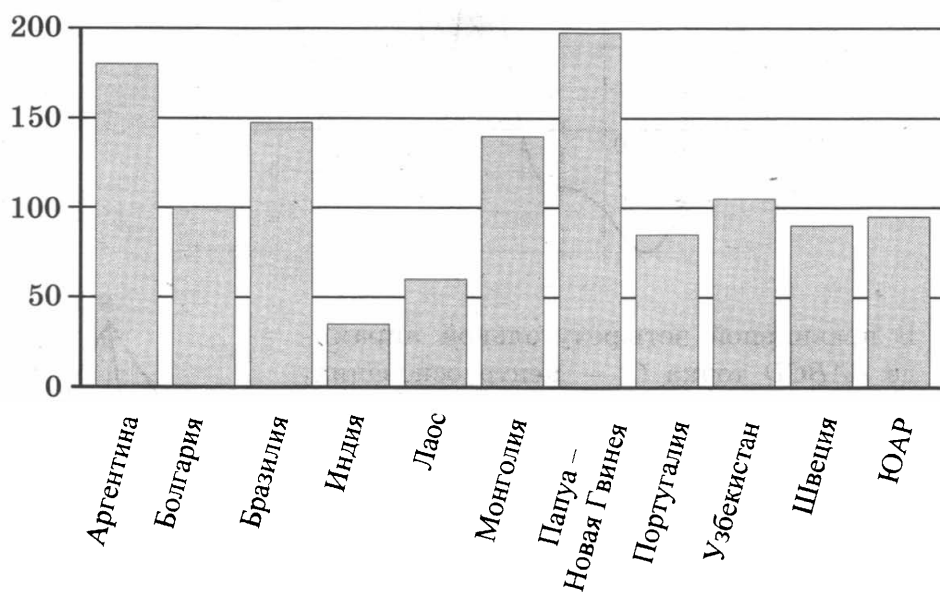
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

# ВАРИАНТ 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

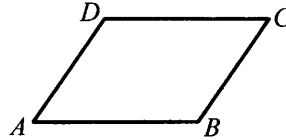
## Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 руб. До установки счётчиков Александр платил за воду (холодную и горячую) ежемесячно 1700 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. при тех же тарифах на воду. За какое наименьшее количество месяцев при тех же тарифах на воду установка счётчиков окупится?
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Аргентина?

 1 2

**3**

3. Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.

**4**

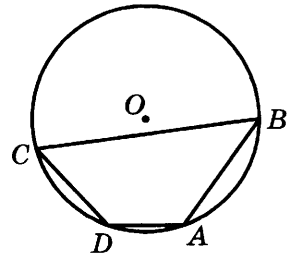
4. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 5 из них встречается вопрос по теории вероятностей. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теории вероятностей.

**5**

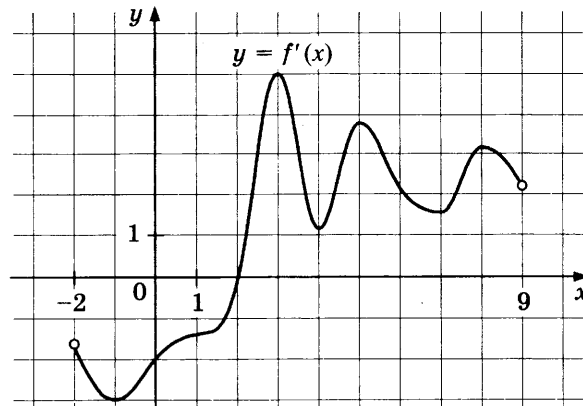
5. Найдите корень уравнения  $\frac{1}{2x+7} = \frac{1}{3x+20}$ .

**6**

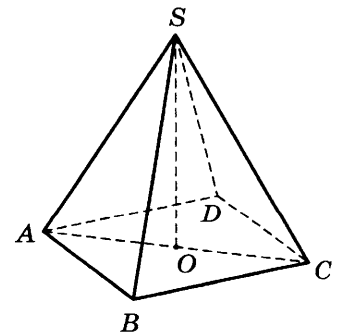
6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны  $125^\circ$  и  $47^\circ$ . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

**7**

7. На рисунке изображён график производной  $y = f'(x)$  функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[3; 8]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

**8**

8. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  точка  $O$  — центр основания,  $S$  — вершина,  $SA = 20$ ,  $AC = 24$ . Найдите длину отрезка  $SO$ .



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\frac{34}{\cos^2 101^\circ + \cos^2 191^\circ}$ .

 9

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением  $pV^{1,4} = \text{const}$ , где  $p$  (атм) — давление в газе,  $V$  — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 24 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

 10

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

 11

12. Найдите точку минимума функции  $y = -\frac{x^2 + 25}{x}$ .

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$ .

 13

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

14. В пирамиде  $SABC$  в основании лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $2\sqrt{3}$ ,  $SA = SC = \sqrt{33}$ ,  $SB = 7$ . Точка  $O$  — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины  $S$ .

 14

а) Докажите, что точка  $O$  лежит вне треугольника  $ABC$ .

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды  $SABCO$ .

15. Решите неравенство  $\log_{x+1}(x-1) \cdot \log_{x+1}(x+2) \leq 0$ .

 15

16. В параллелограмм вписана окружность.

 16

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.



17

17. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство  $\left| \frac{x^2 - 6x + a}{a - 2x} - 2 \right| \leq 1$  справедливо при всех значениях  $x$  из отрезка  $[0; 1]$ .

19

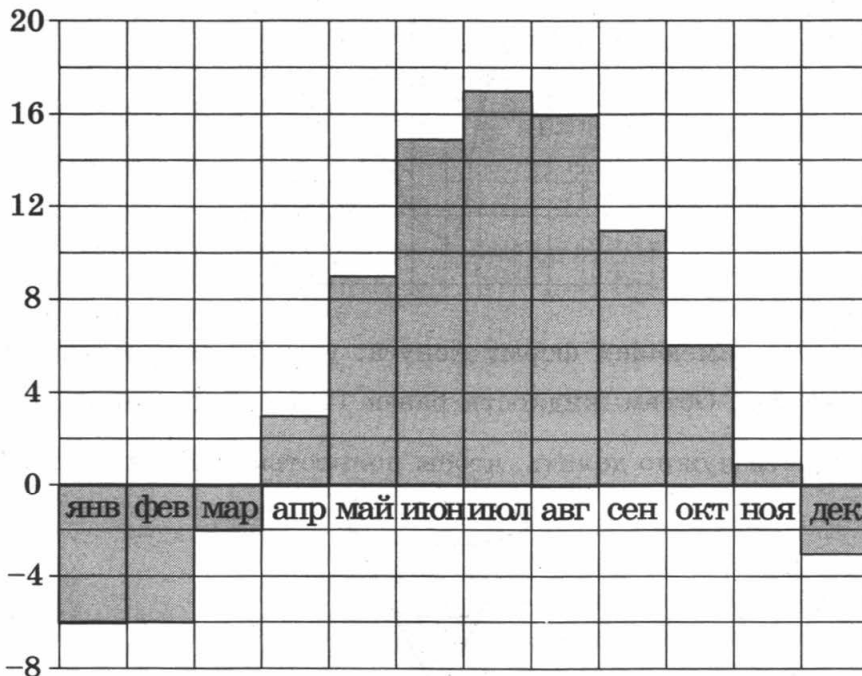
19. Известно, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — попарно различные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство  $\frac{3a + 2c}{b + d} = \frac{12}{19}$ ?
- б) Может ли дробь  $\frac{3a + 2c}{b + d}$  быть в 11 раз меньше, чем сумма  $\frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}$ ?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{3a + 2c}{b + d}$ , если  $a > 3b$  и  $c > 2d$ ?

## ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

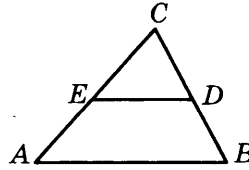
### Часть 1

1. В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3200 руб.?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.

 1 2

3

3. Площадь треугольника  $ABC$  равна 28.  $DE$  — средняя линия. Найдите площадь трапеции  $ABDE$ .



4

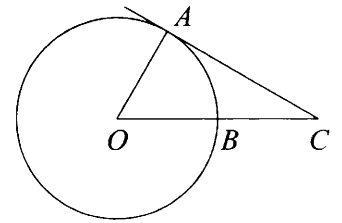
4. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

5

5. Решите уравнение  $2^{5-x} = 0,25$ .

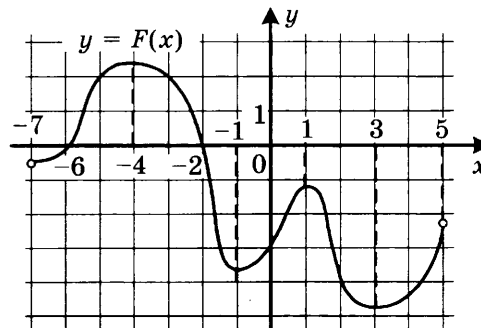
6

6. Угол  $ACO$  равен  $34^\circ$ , где  $O$  — центр окружности. Его сторона  $CA$  касается окружности. Сторона  $CO$  пересекает окружность в точке  $B$  (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги  $AB$  окружности. Ответ дайте в градусах.



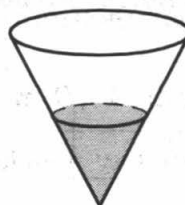
7

7. На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 5)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-5; 2]$ .



8

8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает  $\frac{1}{3}$  высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$ .

 9

10. Компания Яндекс-Маркет вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^{\frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}}},$$

где  $r_{\text{пок}}$  — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1),  $r_{\text{экс}}$  — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и  $K$  — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Эпсилон», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,61.

 10

11. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

 11

12. Найдите наименьшее значение функции  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$ .

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; 3]$ .

  
 13

14. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости  $AA_1 D_1$  и  $DB_1 F_1$  перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1 F_1$ .

 14

15

15. Решите неравенство  $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0$ .

16

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за последние 12 месяцев нужно выплатить банку 1597,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наибольшее значение функции  $f(x) = |x - a| - x^2$  не меньше 1.

19

19. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

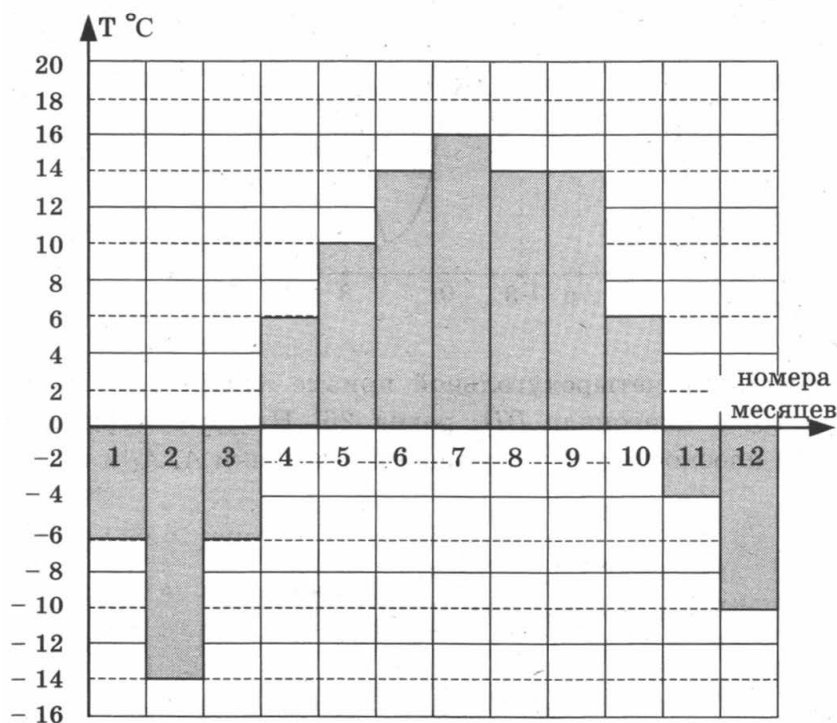
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

## ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

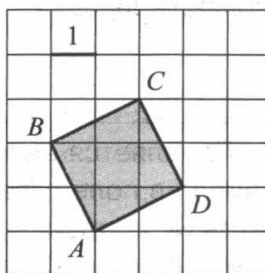
### Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 13 920 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

**3**

3. Найдите площадь квадрата  $ABCD$ , изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  (см. рис.).

**4**

4. В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдёт приз в своей банке.

**5**

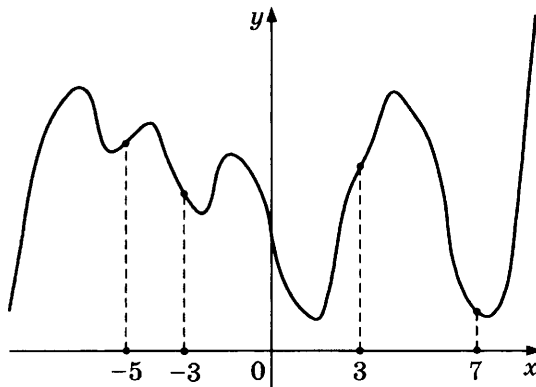
5. Найдите корень уравнения  $(x + 7)^3 = 216$ .

**6**

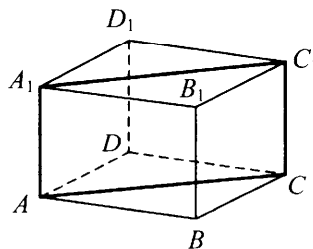
6. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

**7**

7. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-5, -3, 3, 7$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

**8**

8. В правильной четырёхугольной призме  $ABCA_1B_1C_1D_1$  ребро  $AA_1$  равно 10, а диагональ  $BD_1$  равна 26. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки  $A, A_1$  и  $C$ .



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\log_6 144 - \log_6 4$ .
10. К дну высокого цилиндрического резервуара приварена трубка с краном. После открытия крана вода начинает вытекать из резервуара, при этом высота столба воды (в метрах) меняется по закону  $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$ , где  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана,  $H_0 = 5$  м — начальная высота столба воды,  $k = \frac{1}{800}$  — отношение площадей сечений трубки и резервуара, а  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения. Через сколько секунд после открытия крана в резервуаре останется четверть первоначального объёма воды?

9

10

11. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 90 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов 24 минуты позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

11

12. Найдите точку максимума функции  $y = x^3 + 6x^2 + 19$ .

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ .

13

- б) Укажите корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно  $2\sqrt{197}$ .

14

- а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

- б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.



15

15. Решите неравенство  $(\log_2(x+4,2)+2)(\log_2(x+4,2)-3) \geq 0$ .

16

16. Сторона  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  касается некоторой окружности в точке  $M$ . Продолжение стороны  $AD$  пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , причём точка  $P$  лежит между точками  $D$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности, а точка  $Q$  лежит на прямой  $BM$ .

а) Докажите, что  $\angle DMP = \angle CBM$ .

б) Известно, что  $CM = 17$  и  $CD = 32$ . Найдите сторону  $AD$ .

17

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на  $39\%$  больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите  $r$ .

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^6 + (5a - 8x)^3 + 3x^2 + 15a = 24x$$

не имеет корней.

19

19. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

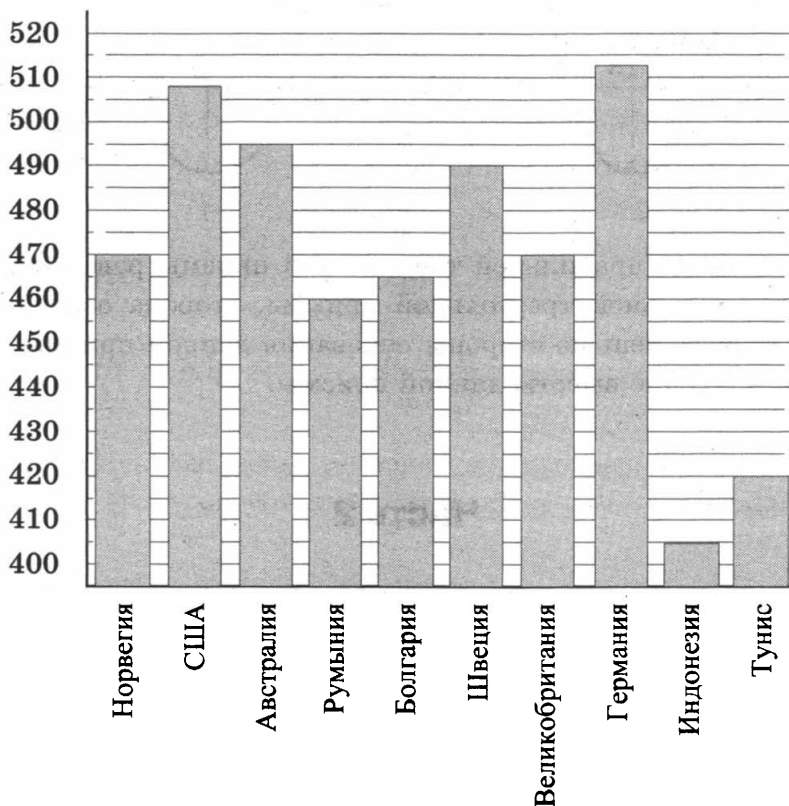
в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

## ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

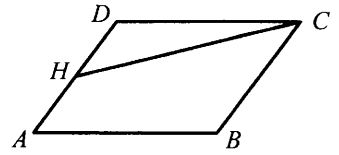
### Часть 1

1. Цена на принтер была понижена на 20% и составила 4800 рублей. Сколько рублей стоил принтер до понижения цены?
2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Австралии. Определите, какое место занимает Тунис.

 1 2

3

3. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 3. Точка  $H$  — середина стороны  $AD$ . Найдите площадь трапеции  $AHCB$ .



4

4. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5

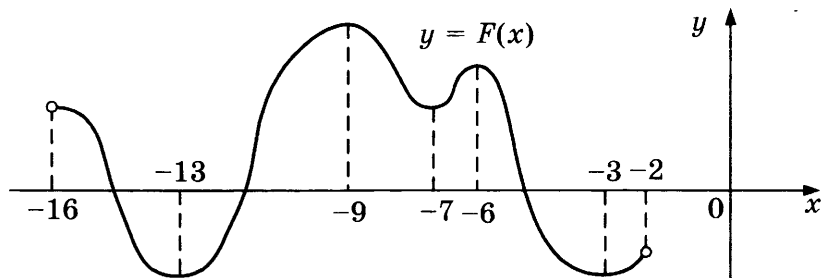
5. Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = 6$ .

6

6. В треугольнике  $ABC$   $AD$  — биссектриса, угол  $C$  равен  $21^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $30^\circ$ . Найдите угол  $B$ . Ответ дайте в градусах.

7

7. На рисунке изображён график первообразной  $y = F(x)$  некоторой функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-16; -2)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-15; -8]$ .



8

8. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, сторона основания которой в 4 раза меньше стороны основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

## Часть 2

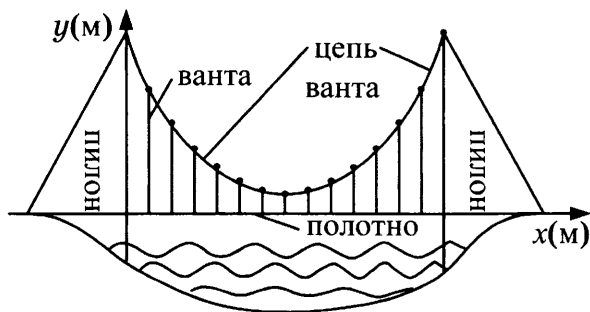
9

9. Найдите значение выражения  $\frac{18}{3^{\log_3 2}}$ .

10

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём

систему координат: ось  $Oy$  направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось  $Ox$  направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение  $y = 0,0021x^2 - 0,47x + 31$ , где  $x$  и  $y$  измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?
12. Найдите наименьшее значение функции  $y = 5 \cos x - 6x + 4$  на отрезке  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

11

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $\cos 4x - \cos 2x = 0$ .  
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .
14. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
 а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .  
 б) Найдите угол между плоскостями  $AD_1 C_1$  и  $A_1 D_1 C$ .

13

14

15

15. Решите неравенство  $x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x - 6} \leq 5$ .

16

16. Окружность, построенная на стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , причём  $AM : MB = 3 : 1$ . Найдите диагональ  $AC$ , если известно, что  $AD = 2\sqrt{2}$ .

17

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

19

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

## ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

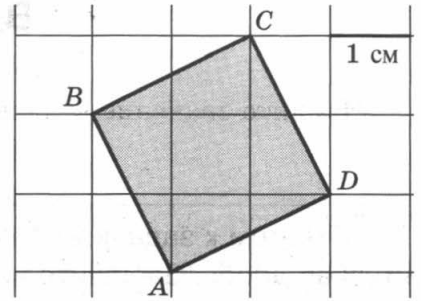
### Часть 1

1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 руб. 80 коп. 1 ноября счётчик электроэнергии показывал: 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря — 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить хозяину квартиры за электроэнергию за ноябрь?
2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

**3**

3. Найдите площадь квадрата  $ABCD$ . Размер каждой клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ . Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**4**

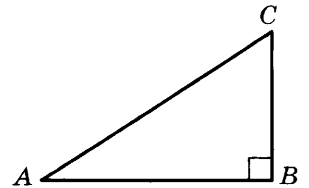
4. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна  $0,4$ . Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна  $0,2$ . Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

**5**

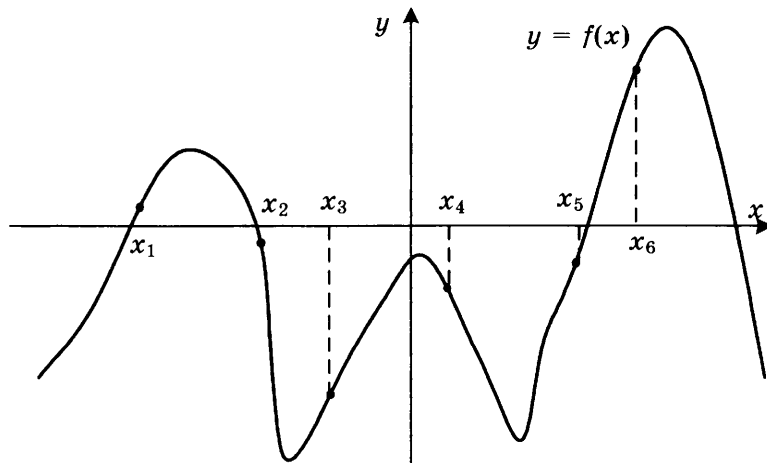
5. Решите уравнение  $3^{x-3} = 27$ .

**6**

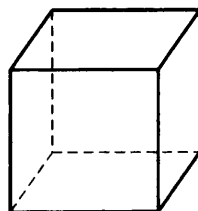
6. Один острый угол прямоугольного треугольника на  $30^\circ$  больше другого. Найдите больший острый угол.

**7**

7. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите среди точек  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  и  $x_6$  те точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

**8**

8. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\log_2 7 \cdot \log_7 4$ .

 9

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением  $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях,  $V_1$  и  $V_2$  — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 313,6 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

 10

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

 11

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 73$$

на отрезке  $[0; 7]$ .

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$$

  
 13

14. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое рёбро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит апофему грани  $ASB$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .

 14



15

16

17

18

19

15. Решите неравенство  $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \leq 0$ .

16. Отрезок, соединяющий середины  $M$  и  $N$  оснований  $BC$  и  $AD$  соответственно трапеции  $ABCD$ , разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание  $BC$  исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны  $AB$ , основания  $AN$  трапеции  $ABMN$  и вписанной в неё окружности.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2 \log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, найдите это решение.

19. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно  $\frac{13}{7}$ ?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно  $\frac{8}{7}$ ?

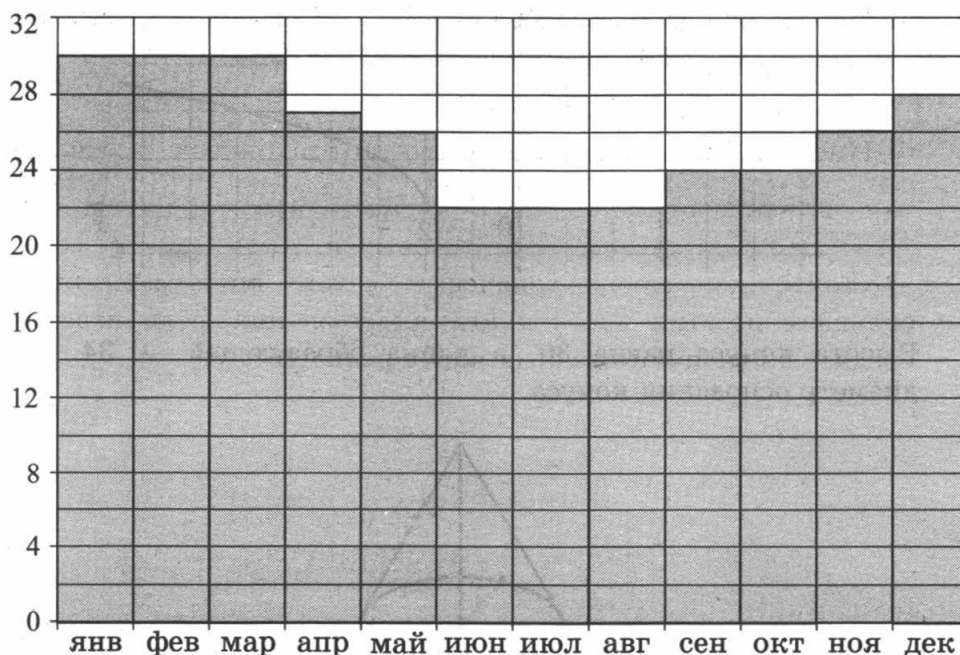
в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

## ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

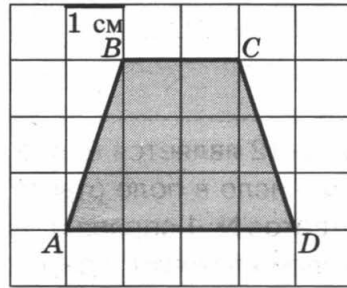
### Часть 1

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

**3**

3. Найдите площадь трапеции  $ABCD$ . Размер каждой клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ . Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**4**

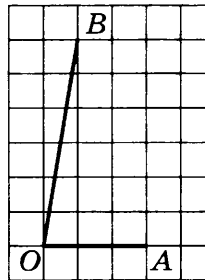
4. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

**5**

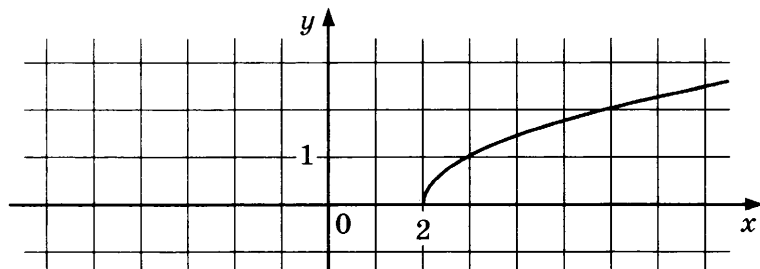
5. Найдите корень уравнения  $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$ .

**6**

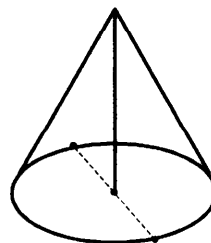
6. Найдите тангенс угла  $AOB$ , изображённого на клетчатой бумаге.

**7**

7. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Прямая, проходящая через точку  $(-6; -1)$ , касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите  $f'(6)$ .

**8**

8. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



## Часть 2

9. Найдите  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$  и  $\alpha \in (0; 0,5\pi)$ .
10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения  $P$  (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:  $P = \sigma ST^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная, площадь поверхности  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности  $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$ , а излучаемая ею мощность  $P$  равна  $4,104 \cdot 10^{27}$  Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.
11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Трубы начали наполнять баки одновременно. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
12. Найдите наименьшее значение функции  $y = 5 \cos x - 6x + 4$  на отрезке  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .
- Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.
- Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.
13. а) Решите уравнение  $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$ .  
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3\pi; -\pi]$ .
14. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB = 8\sqrt{3}$ , а боковое ребро  $AA_1 = 5$ .  
а) Найдите длину отрезка  $A_1K$ , где  $K$  — середина ребра  $BC$ .  
б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $B_1CA_1$  и  $BB_1C_1$ .

 9 10 11 12  
 13 14

15

15. Решите неравенство  $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0$ .

16

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|\log_{0,5}(x^2) - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$  имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

19

19. Известно, что  $a, b, c$ , и  $d$  — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$ ?

б) Может ли дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  быть в 11 раз меньше, чем сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?

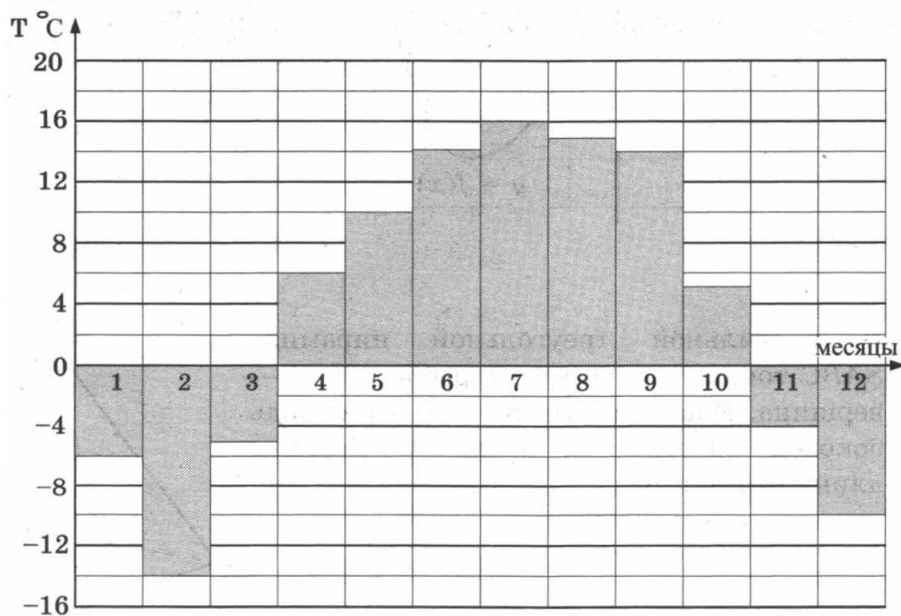
в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ , если  $a > 3b$  и  $c > 6d$ ?

## ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

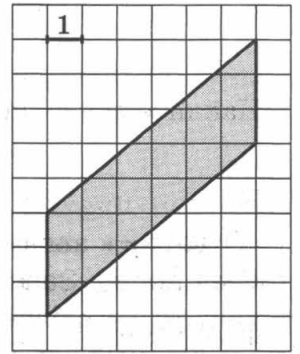
### Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. меньше. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

3

3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4

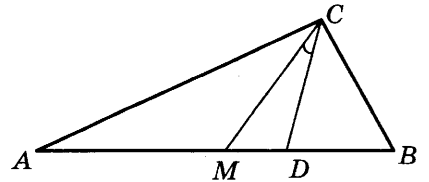
4. В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

5

5. Найдите корень уравнения  $\log_3(-5-x) = 1$ .

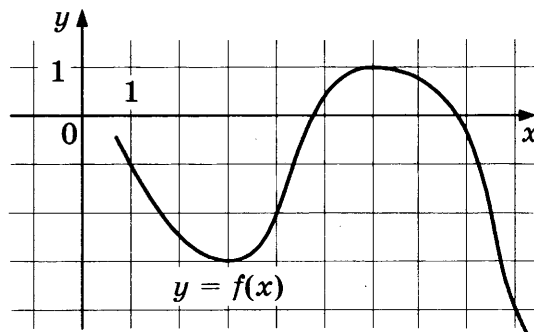
6

6. Острые углы прямоугольного треугольника равны  $63^\circ$  и  $27^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



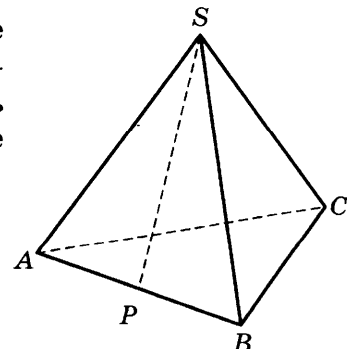
7

7. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[1; 9]$ .



8

8. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  точка  $P$  — середина ребра  $AB$ ,  $S$  — вершина. Известно, что  $SP = 4$ , а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка  $BC$ .



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$ .
10. К источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 155 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 0,5 \text{ Ом}$  хотят подключить нагрузку с сопротивлением  $R \text{ Ом}$ . Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой  $U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$ . При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет  $150 \text{ В}$ ? Ответ выразите в омах.
11. Из точки А в точку В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на  $7 \text{ км/ч}$ , а вторую половину пути — со скоростью  $72 \text{ км/ч}$ , в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше  $30 \text{ км/ч}$ . Ответ дайте в км/ч.
12. В какой точке  $x_0$  функция  $y = \sqrt{3 - 3x - 2x^2}$  принимает наибольшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = 1$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения принадлежащие отрезку  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ .
14. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
- а) Докажите, что прямая  $B_1 D$  перпендикулярна плоскости  $A_1 B C_1$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $AB_1 C_1$  и  $A_1 B_1 C$ .



15

15. Решите неравенство  $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$ .

16

16. Отрезок, соединяющий середины  $M$  и  $N$  оснований  $BC$  и  $AD$  соответственно трапеции  $ABCD$ , разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.  
 а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.  
 б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание  $BC$  исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны  $AB$ , основания  $AN$  трапеции  $ABMN$  и вписанной в неё окружности.

17

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 108 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18

18. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 2a + 3)^2 + (y - a)^2 = 2,25; \\ (x + 3)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

19

19. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

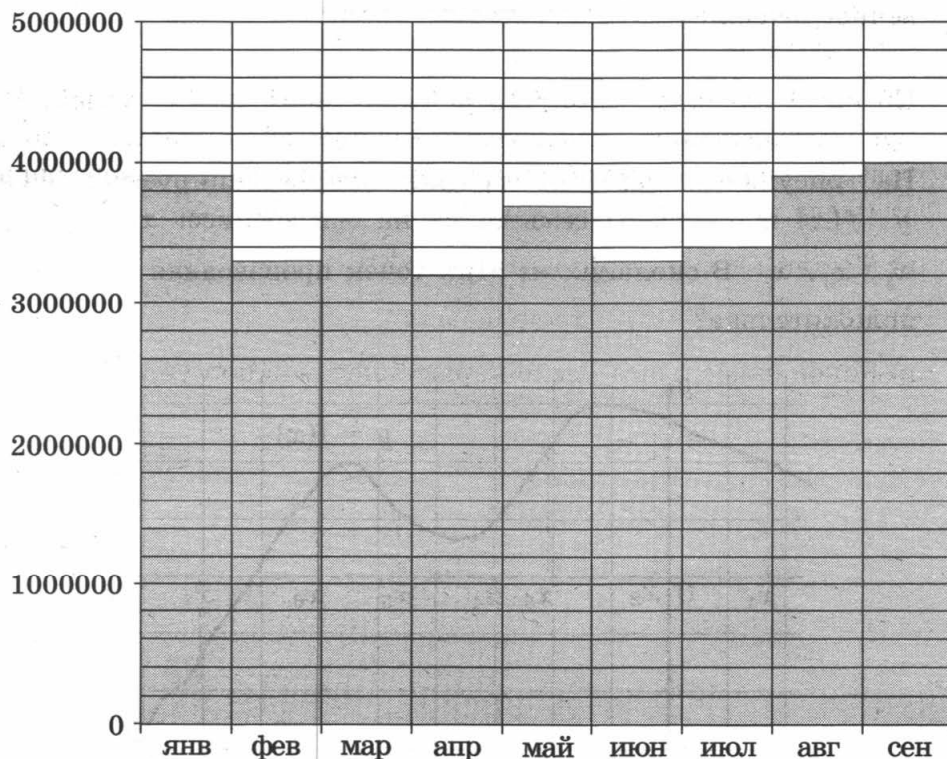
в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

## ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

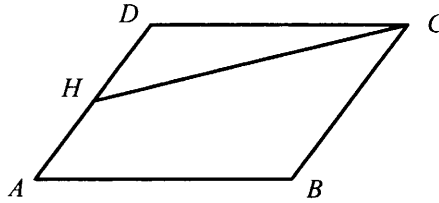
### Часть 1

1. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.

 1 2

3

3. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 3. Точка  $H$  — середина стороны  $AD$ . Найдите площадь трапеции  $AHCB$ .



4

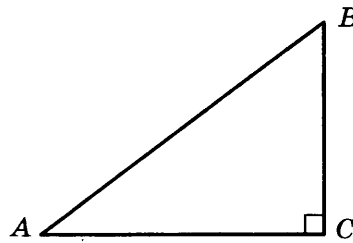
4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5

5. Найдите корень уравнения  $\log_6(8 - x) = \log_{36} 9$ .

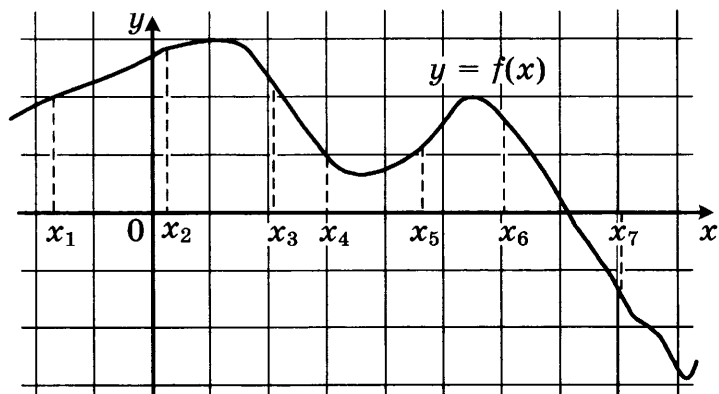
6

6. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ . Найдите  $\cos B$ .

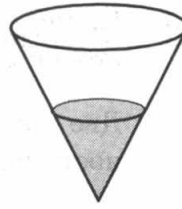


7

7. На рисунке изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и отмечены семь точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?



8. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?


 8

## Часть 2

9. Найдите  $4 \cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,5$ .
10. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию  $q$  (единиц в месяц) от её цены  $p$  (тыс. руб.) задаётся формулой:  $q = 100 - 10p$ . Определите уровень цены  $p$  (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц  $r = q \cdot p$  составит 210 тыс. руб.
11. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?
12. Найдите наименьшее значение функции  $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

 9

 10

 11

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .
14. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$ , все рёбра которой равны 4, точка  $N$  — середина ребра  $AC$ , точка  $O$  — центр основания пирамиды, точка  $P$  делит отрезок  $SO$  в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.  
 а) Докажите, что прямая  $NP$  перпендикулярна прямой  $BS$ .  
 б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $NP$ .

  
 13

 14

15

16

17

18

19

15. Решите неравенство  $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$ .

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

17. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк  $x$  рублей. Какой должна быть сумма  $x$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых любое число из отрезка  $2 \leq x \leq 3$  является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

19. Пусть  $q$  — наименьшее общее кратное, а  $d$  — наибольший общий делитель натуральных чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих равенству  $3x = 8y - 29$ .

а) Может ли  $\frac{q}{d}$  быть равным 170?

б) Может ли  $\frac{q}{d}$  быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение  $\frac{q}{d}$ .

## ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

### Часть 1

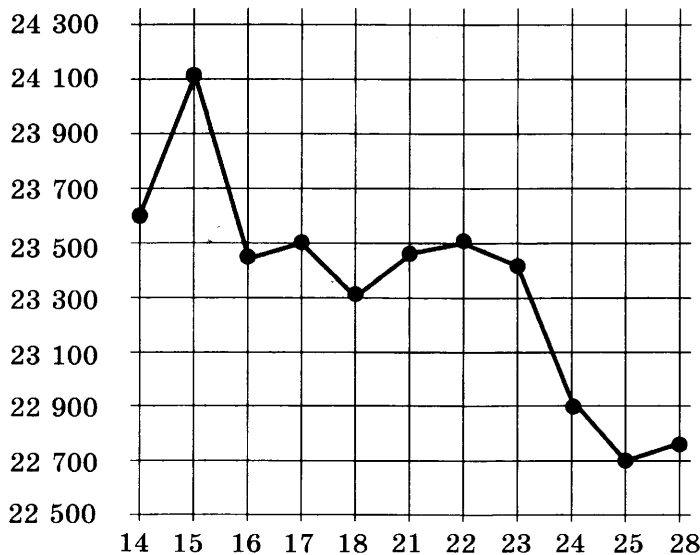
1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Какое наименьшее количество пачек нужно купить на все дни конференции?

 1

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

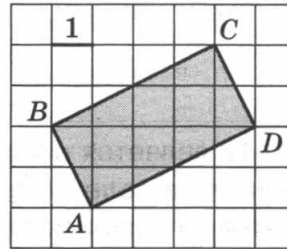
 2

По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



3

3. Найдите площадь прямоугольника  $ABCD$ , изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  (см. рис.).



4

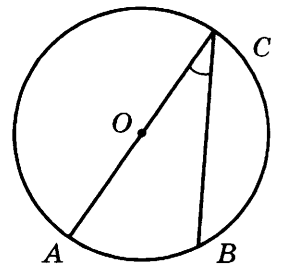
4. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

5

5. Найдите корень уравнения  $5^{4-x} = 25$ .

6

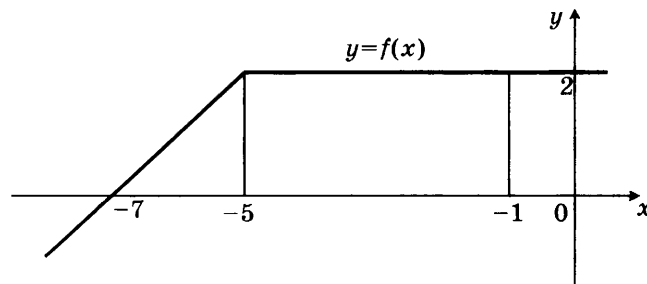
6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет  $1/5$  окружности. Ответ дайте в градусах.



7

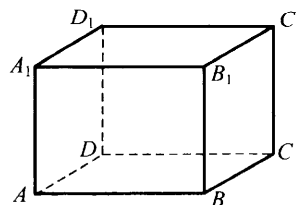
7. На рисунке изображен график некоторой функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_{-7}^{-1} f(x) dx.$$



8

8. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 32$ . Найдите площадь сечения, проходящего через вершины  $C$ ,  $C_1$  и  $A$ .



## Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\log_6 126 - \log_6 3,5$ .
10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально, и на исследуемом интервале температур задаётся выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 900$  К,  $a = 31$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.
11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.
12. Найдите наименьшее значение функции  $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

 9 10 11 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$ .  
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .
14. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  сторона основания равна 8. Точка  $L$  — середина ребра  $SC$ . Тангенс угла между прямыми  $BL$  и  $SA$  равен  $2\sqrt{\frac{2}{5}}$ .  
а) Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые  $BO$  и  $LO$  перпендикулярны.  
б) Найдите площадь поверхности пирамиды.
15. Решите неравенство  $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0$ .

  
 13 14 15



16

16. На отрезке  $BD$  взята точка  $C$ . Биссектриса  $BL$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  является боковой стороной равнобедренного треугольника  $BLD$  с основанием  $BD$ .

а) Докажите, что треугольник  $DCL$  равнобедренный.

б) Известно, что  $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$ . В каком отношении прямая  $DL$  делит сторону  $AB$ ?

17

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на  $15\%$  больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите  $r$ .

18

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых модуль разности корней уравнения  $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$  принимает наибольшее значение.

19

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

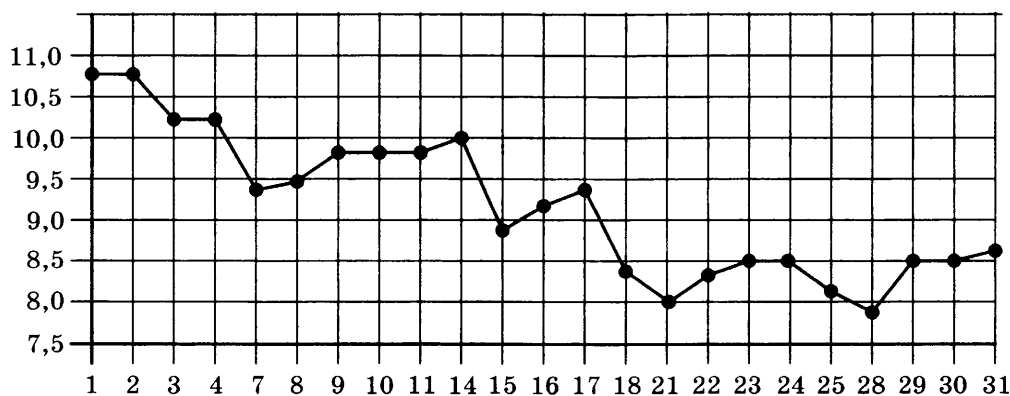
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

## ВАРИАНТ 10

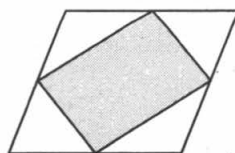
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

### Часть 1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.
2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.



3. Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

 1 2 3

4

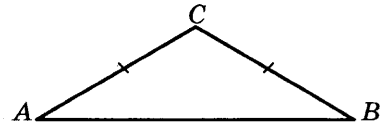
4. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

5

5. Найдите корень уравнения  $\sqrt{14 + 5x} = 7$ .

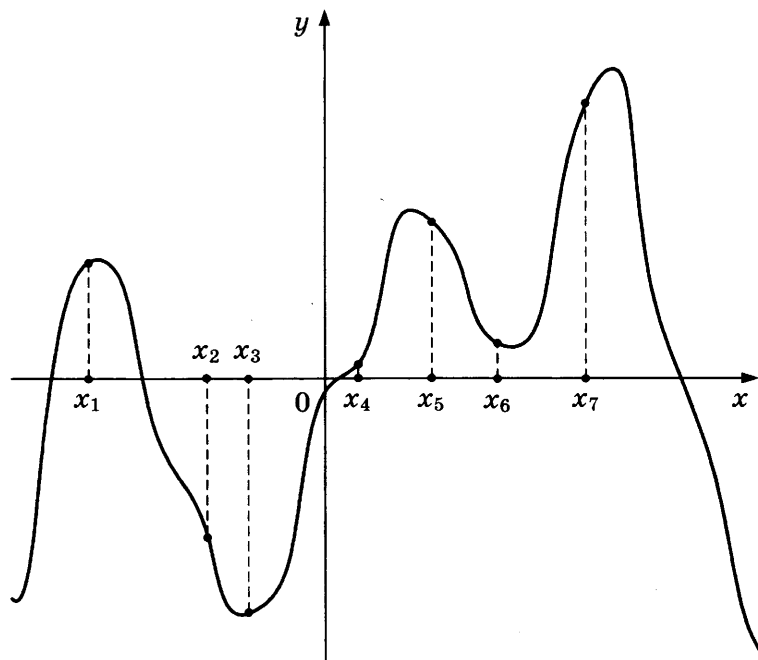
6

6. В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ , угол  $C$  равен  $120^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ . Найдите  $AC$ .



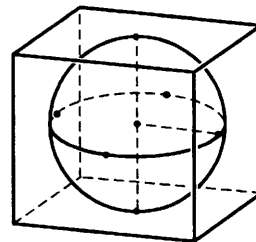
7

7. На рисунке изображены график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , и семь точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  возрастает?



8

8. Шар, объём которого равен  $42\pi$ , вписан в куб. Найдите объём куба.

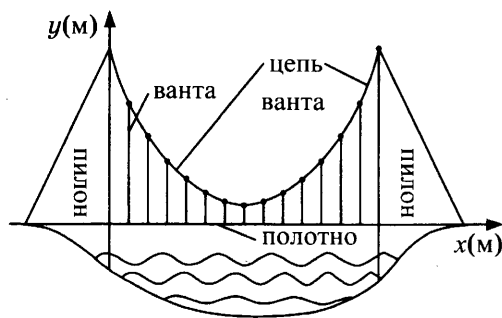


## Часть 2

9

9. Найдите  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$  и  $\alpha \in (\pi; 2\pi)$ .

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось  $Oy$  направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось  $Ox$  направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение  $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$ , где  $x$  и  $y$  измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.
12. Найдите наибольшее значение функции  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$  на отрезке  $[-1; 4]$ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение  $3 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .
14. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.  
 а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SE$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SB$  в отношении 1 : 3, считая от вершины  $B$ .  
 б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SE$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .

15

15. Решите неравенство  $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$ .

16

16. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне треугольника построены квадраты  $ACDE$  и  $BFKC$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AB$ .

а) Докажите, что  $CM = \frac{1}{2} DK$ .

б) Найдите расстояния от точки  $M$  до центров квадратов, если  $AC = 10$ ,  $BC = 32$  и  $\angle ACB = 30^\circ$ .

17

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18

18. Найдите все неотрицательные значения  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4 \log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{1/3}^2(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

19

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

# ОТВЕТЫ

## Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	2	19	0,25	-13	55	3	16	34	0,75	9,6	-5

13	а) $2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
14	б) $\frac{88\sqrt{15}}{27}$
15	(1; 2]
16	$\frac{15}{2}\sqrt{15}$
17	2008
18	$(-\infty; 0)$
19	а) Да, например, если $a = 10, b = 50, c = 15$ и $d = 45$ ; б) нет; в) $\frac{291}{59}$

## Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3680	4	21	0,375	7	56	3	312	-5	0,81	10	4

13	а) 1; $\log_2 6$ ; б) $\log_2 6$
14	$\frac{2}{3}$
15	(3; 4), [5; 6), (6; 7]
16	$\frac{96}{7}\sqrt{3}$
17	3 000 000 рублей
18	$a \leq -0,75; a \geq 0,75$
19	а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$

## Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16000	30	5	0,96	-1	120	3	240	2	400	10	-4

13	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \arctg \frac{3}{7} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{7\pi}{4}, 2\pi + \arctg \frac{3}{7}$
14	14
15	$(-4, 2; -3, 95], [3, 8; +\infty)$
16	$\frac{85}{3}$

17	3
18	$\left(\frac{16}{5}; +\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 26

### Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6000	9	2,25	0,012	1,5	99	2	20	9	8,39	30	9

13	а) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$
16	$2\sqrt{7}$
17	86 000 рублей
18	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
19	а) 36; б) 72; в) 1

### Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
318,6	6	5	0,4	6	60	2	343	2	9,8	40	181

13	а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}, -2\pi + \arccos \frac{2}{5}$
14	б) 1 : 2
15	$[\log_2 7; 6]$
16	$\frac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$
17	300 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 4$
19	а) Да, например, числа 7, 10 и 13; б) нет; в) $\frac{35}{24}$

### Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	9	0,99	69	6	0,25	32	0,75	6000	9	9

13	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$ ; б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}, -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$
14	а) 13; б) $\frac{12}{5}$
15	$[\log_3 30; 4]$

16	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$
17	104 500 рублей
18	$-\frac{9}{4} < a < 2$
19	а) Да, например, если $a = 10$ , $b = 20$ , $c = 11$ и $d = 37$ ; б) нет; в) $\frac{79}{21}$

### Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	30	18	0,2	-8	18	-4	4	50	15	63	-0,75

13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{11\pi}{3}$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-2; -1] \cup (1; 2)$
16	$\frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}$
17	1 620 000 рублей
18	$a = 2,5$
19	а) да; б) нет; в) 31

### Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10980	4000000	2,25	0,999	5	0,6	3	175	2	7	3	16

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{5\pi}{2}$ ; $\frac{11\pi}{4}$ ; $\frac{7\pi}{2}$
14	б) 2
15	$(-\infty; 0], [1; 7)$
16	3
17	2 296 350
18	$a \geq 1$
19	а) да; б) нет; в) 4

### Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	25	10	0,5	2	36	10	160	2	25	6	16

13	а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ , $n \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{17\pi}{6}$ , $-\frac{13\pi}{6}$
14	192



15	$[-2; 2]$
16	4 : 21
17	3
18	$a = 2$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

### Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	28	7	0,505	7	1	5	252	-0,75	17,67	21	-2

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , $(-1)^{m+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi m$ , $n, m \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{3\pi}{2}$ , $2\pi - \arcsin \frac{2}{3}$ , $\pi + \arcsin \frac{2}{3}$
14	б) 3 : 4
15	$(-\infty; -3], [-2; 5)$
16	19
17	2 034 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$
19	а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Бланк ответов № 1



Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ 7 6 5 4 3 2 1 0
А В С D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Region Code subject Name input fields

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Variant number input fields

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

Grid of 40 numbered boxes for answers, each containing a 2x10 grid of circles

Four rows of boxes for additional information, each containing a 2x10 grid of circles



# РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

## Вариант 8

### Часть 2

13. а) Решите уравнение  $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**Решение.**

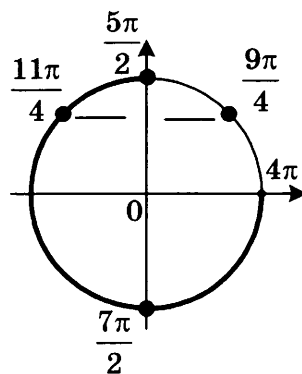
а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2 \cos x \sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}; \quad 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x; \quad \cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0; \quad \cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$  или  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью единичной окружности отберем корни на отрезке  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Получаем:  $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{11\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{2}$ .



**Ответ:** а)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{11\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{2}$ .

14. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$ , все рёбра которой равны 4, точка  $N$  — середина ребра  $AC$ , точка  $O$  — центр основания пирамиды, точка  $P$  делит отрезок  $SO$  в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

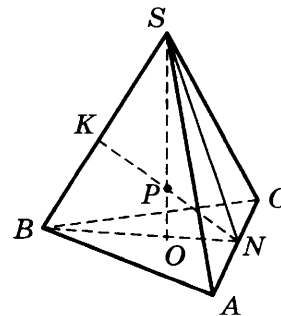
а) Докажите, что прямая  $NP$  перпендикулярна прямой  $BS$ .

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $NP$ .

**Решение:**

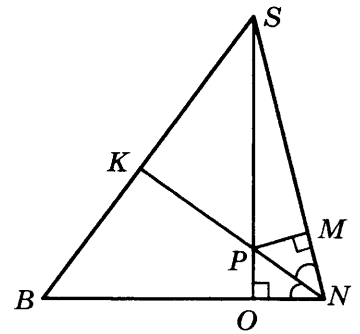
а) Точка  $O$  принадлежит отрезку  $BN$ , значит, точка  $P$ , лежащая на отрезке  $SO$ , находится в плоскости  $SBN$ . Поэтому прямая  $PN$  содержится в плоскости  $SBN$  и пересекает  $SB$  в точке  $K$ .

$\triangle SNB$  равнобедренный, поскольку отрезки  $SN$  и  $BN$  — медианы одинаковых равносторонних треугольников  $SAC$  и  $BAC$ . Поэтому  $SN = BN$ . В точке  $O$  пересекаются медианы основания, значит,  $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$ .



Опустим перпендикуляр из точки  $P$  на сторону  $SN$ . Пусть он пересекает  $SN$  в точке  $M$ . Треугольники  $SPM$  и  $SNO$  подобны, поэтому  $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$ .

Значит,  $PM = \frac{1}{3}SP = PO$ . Следовательно, треугольники  $NPO$  и  $NPM$  равны и  $PN$  — биссектриса угла  $SNB$ . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит,  $NK \perp BS$ .



б) Так как  $BS$  перпендикулярно  $NK$ , то искомое расстояние равно длине отрезка  $BK$ . Так как  $NK$  является медианой треугольника  $SNB$ , то  $BK = \frac{1}{2}BS = 2$ .

**Ответ: 2.**

15. Решите неравенство  $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$ .

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$x \left( \frac{2x - 8}{x - 7} - 1 \right) \leq 0;$$

$$\frac{x(x - 1)}{x - 7} \leq 0,$$

откуда  $x \leq 0$  или  $1 \leq x < 7$ .

**Ответ:  $(-\infty; 0]$ ;  $[1; 7)$ .**

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

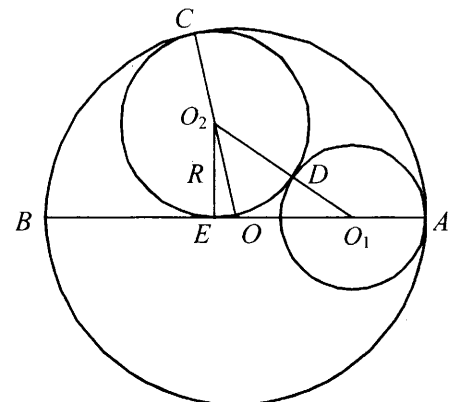
а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

**Решение:**

а) Пусть  $AB$  — диаметр большей из трёх окружностей,  $O$  — её центр,  $O_1$  — центр окружности радиуса  $r$ , касающейся окружности с диаметром  $AB$  в точке  $A$ ,  $O_2$  — центр окружности радиуса  $R$ , касающейся окружности с диаметром  $AB$  в точке  $C$ , окружности с центром  $O_1$  — в точке  $D$ , отрезка  $AB$  — в точке  $E$ .

Точки  $O$ ,  $O_2$  и  $C$  лежат на одной прямой, поэтому  $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$ . Аналогично



$$OO_1 = OA - O_1A = OA - r \quad \text{и} \quad O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R.$$

Следовательно, периметр треугольника  $OO_1O_2$  равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

б) Пусть  $OA = 6$ ,  $r = 2$ . Тогда

$$O_2E = R, O_1O_2 = 2 + R, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников  $O_1O_2E$  и  $OO_2E$  находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + R)^2 - R^2} = \sqrt{4 + 4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - R)^2 - R^2} = \sqrt{36 - 12R},$$

а так как  $O_1E = OO_1 + OE$ , то  $\sqrt{4 + 4R} = 4 + \sqrt{36 - 12R}$ . Из этого уравнения находим, что  $R = 3$  (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка  $E$  совпадает с  $O$ ).

**Ответ: 3.**

17. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк  $x$  рублей. Какой должна быть сумма  $x$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

**Решение:**

Пусть сумма кредита равна  $S$ , а годовые составляют  $a\%$ . Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент  $b = 1 + 0,01a$ . После первой выплаты сумма долга составит  $S_1 = Sb - x$ . После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - x = (Sb - x)b - x = Sb^2 - (1 + b)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)x = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot x.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)x = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot x.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot x = 0, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{Sb^4(b - 1)}{b^4 - 1}.$$

При  $S = 6\,902\,000$  и  $a = 12,5$ , получаем:  $b = 1,125$  и

$$x = \frac{6\,902\,000 \cdot 1,601806640625 \cdot 0,125}{0,601806640625} = 2\,296\,350 \text{ (рублей)}.$$

**Ответ: 2 296 350.**

18. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых любое число из отрезка  $2 \leq x \leq 3$  является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

**Решение:**

Если  $2a + 5 < 0$ , то уравнение решений не имеет.

Пусть  $a = -2,5$ . Тогда уравнение имеет вид

$$|x + 0,5| + |x + 0,5| = 0,$$

и ни одно число из отрезка  $[2, 3]$  не является его решением.

Пусть  $a > -2,5$ . Будем использовать геометрический подход и запишем уравнение в виде

$$|x - (a + 2)| + |x - (-a - 3)| = 2a + 5.$$

Заметим, что при  $a > -2,5$  верно неравенство  $-a - 3 < a + 2$ . Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка  $[-a - 3, a + 2]$ : ведь длина этого отрезка равна  $(a + 2) - (-a - 3) = 2a + 5$  и неравенству удовлетворяют те и только те точки  $x$ , сумма расстояний от каждой из которых до точек  $x = a + 2$ ;  $x = -a - 3$  равна  $2a + 5$ . Осталось выбрать те значения  $a$ , при каждом из которых отрезок  $[-a - 3, a + 2]$  содержит отрезок  $[2, 3]$ . Это выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a - 3 \leq 2, \\ a + 2 \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -5, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad a \geq 1.$$

**Ответ:**  $a \geq 1$ .

19. Пусть  $q$  — наименьшее общее кратное, а  $d$  — наибольший общий делитель натуральных чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих равенству  $3x = 8y - 29$ .

а) Может ли  $\frac{q}{d}$  быть равным 170?

б) Может ли  $\frac{q}{d}$  быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение  $\frac{q}{d}$ .

**Решение:**

а) Для чисел  $x = 17$  и  $y = 10$  выполняется условие  $3x = 8y - 29$ ,  $q = 170$ ,  $d = 1$ ,  $\frac{q}{d} = 170$ .

б) и в) При  $x = 1$  и  $y = 4$  выполняется равенство  $3x = 8y - 29$  и  $\frac{q}{d} = 4$ . Покажем, что никакое значение  $\frac{q}{d} < 4$  не реализуется.

Если  $x = y$ , то  $x = y = \frac{29}{5}$ , что невозможно, поскольку числа  $x$  и  $y$  – натуральные.

Пусть для определённости  $x < y$  и  $x = ad$ , а  $y = bd$ . Тогда натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно просты и  $a < b$ . Получаем  $q = \frac{xy}{d} = abd$ , откуда  $\frac{q}{d} = ab$ .

Если  $\frac{q}{d} = 1$ , то  $a = b$ , что невозможно.

Если  $\frac{q}{d} = 2$ , то  $a = 1$ ,  $b = 2$  и, значит,  $y = 2x$ , откуда  $x = \frac{29}{13}$ , что невозможно.

Если  $\frac{q}{d} = 3$ , то  $a = 1$ ,  $b = 3$  и, значит,  $y = 3x$ , откуда  $x = \frac{29}{21}$ , что невозможно.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 4.



*Справочное издание*

**Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К.,  
Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И.,  
Рязановский А. Р., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Хачатурян А. В.,  
Шестаков С. А., Шноль Д. Э.**

# **ЕГЭ**

# **МАТЕМАТИКА**

## **ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ**

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат  
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16678 от 20.05.2015 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*  
Редактор *И. М. Бокова*  
Технический редактор *Л. В. Павлова*  
Корректоры *Л. К. Корнилова, Н. Н. Яковлева*  
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*  
Компьютерная верстка *К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. [www.examen.biz](http://www.examen.biz)  
E-mail: по общим вопросам: [info@examen.biz](mailto:info@examen.biz);  
по вопросам реализации: [sale@examen.biz](mailto:sale@examen.biz)  
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, [www.pareto-print.ru](http://www.pareto-print.ru)

**По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).**